УДК 519.63: 621.372.8
doi:10.21685/2072-3040-2021-1-7

Исследование задачи о нормальных волнах открытого волновода кругового сечения с неоднородным киральным слоем

Ю. Г. Смирнов[1], Е. Ю. Смолькин[2]

[1,2]Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
[1]mmm@pnzgu.ru, [2]e.g.smolkin@hotmail.com

Аннотация. *Актуальность и цели.* Цель работы – исследование свойств спектра задачи распространения электромагнитных волн открытого волновода кругового сечения с неоднородным киральным слоем. *Материалы и методы.* Для исследования задачи применен метод оператор-функций. *Результаты.* Изучены спектральные свойства задачи о нормальных волнах открытого волновода кругового сечения с неоднородным киральным слоем. *Вывод.* Предложенный подход может быть применен для исследования поверхностных волн регулярных неоднородных открытых волноведущих структур с киральными средами.

Ключевые слова: электромагнитные волны, уравнения Максвелла, метод оператор-функций, киральная среда

Финансирование: работа поддержана грантом Российского научного фонда № 20-11-20087.

Для цитирования: Смирнов Ю. Г., Смолькин Е. Ю. Исследование задачи о нормальных волнах открытого волновода кругового сечения с неоднородным киральным слоем // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 1 (57). С. 85–101. doi:10.21685/2072-3040-2021-1-7

Problem research of an open circular waveguide normal waves with an inhomogeneous chiral layer

Yu.G. Smirnov[1], E.Yu. Smol'kin[2]

[1,2]Penza State University, Penza, Russia
[1]mmm@pnzgu.ru, [2]e.g.smolkin@hotmail.com

Abstract. *Background.* The aim of this work is to study the properties of the spectrum of the problem of propagation of electromagnetic waves of an open circular waveguide with an inhomogeneous chiral layer. *Material and methods.* To find a solution, the method of operator-functions is used. *Results.* Spectral properties of the problem of normal waves of an open circular waveguide with an inhomogeneous chiral layer are studied. *Conclusions.* The proposed approach can be applied to study surface waves of regular inhomogeneous open wave-carrying structures with chiral media.

Keywords: electromagnetic waves, Maxwell's equation, operator-function method, chiral medium

Acknowledgments: the work is supported by the Russian Science Foundation No 20-11-20087.

For citation: Smirnov Yu.G., Smol'kin E.Yu. Problem research of an open circular waveguide normal waves with an inhomogeneous chiral layer. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings.*

Volga region. Physical and mathematical sciences. 2021;1:85–101. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2021-1-7

Введение

В электродинамике большую роль играют задачи о распространении электромагнитных волн в волноведущих структурах. Эти задачи в случае однородного заполнения волновода были подробно изучены в работах А. Н. Тихонова и А. А. Самарского. Однако при неоднородном заполнении волновода возникают значительно более сложные краевые задачи на собственные значения для систем уравнений Гельмгольца с разрывными коэффициентами, причем на поверхностях разрыва коэффициентов условия сопряжения содержат спектральный параметр. В задачах для неоднородных структур спектральный параметр входит в условия сопряжения нелинейным образом. Задача становится несамосопряженной и нелинейной по спектральному параметру [1–3].

Для исследования таких задач на собственные значения оказывается естественным и эффективным применение метода операторных пучков. С помощью вариационного подхода исходная краевая задача сводится к изучению некоторого операторного пучка в подходящем пространстве Соболева. Для исследования свойств операторов пучка можно использовать аппарат функционального анализа, а для изучения его спектральных свойств – хорошо развитую теорию операторных пучков (см. [2–4]). В работах [1–5] в целом построена теория распространения нормальных волн в закрытых (экранированных) неоднородных волноведущих структурах. Точнее, доказана дискретность спектра задачи, получены результаты о распределении и локализации характеристических чисел на комплексной плоскости. Кроме того, доказан ряд теорем о кратной полноте по Келдышу системы собственных и присоединенных векторов пучка в выбранных пространствах Соболева.

Но для открытых (неэкранированных или частично экранированных) структур достаточно полной теории распространения нормальных волн до сих пор не построено. Из-за некомпактности соответствующих операторов (в силу неограниченности области) задача становится значительно сложнее: пучок уже не будет фредгольмовым, и известные теоремы о свойствах пучка применить не удается. В статье предлагается перейти к задаче в ограниченной области с помощью представления решения через функцию Грина внешности достаточно большого круга и использования условий сопряжения. Но при этом теряется полиномиальная зависимость от спектрального параметра и голоморфность оператор-функции во всей комплексной плоскости. Первые результаты по исследованию этой задачи получены недавно [6] для круглого волновода.

В последнее время в связи с прогрессом в области полимерных технологий появились новые синтезированные киральные материалы, которые способствовали развитию интереса к исследованиям в этой области. В нашей стране киральными средами занимались и занимаются С. А. Третьяков, А. Н. Боголюбов, В. А. Неганов, О. В. Осипов и другие ученые. При взаимодействии электромагнитной волны с киральной средой наблюдается ряд специфических эффектов [7, 8].

Исследование спектра открытых волноведущих структур приводит к тому, что в вариационном соотношении появляется оператор следа (на границе фиктивной области), нелинейным образом зависящий от спектрального параметра. Приходится анализировать уже не операторный пучок (как в [5]), а оператор-функцию. Тем не менее удается достаточно подробно изучить свойства оператор-функции и получить результаты о ее спектре. В статье доказывается дискретность спектра задачи о нормальных волнах неоднородной волноведущей структуры кругового сечения, заполненной киральной средой. Представлены результаты численного исследования спектра распространяющихся поверхностных волн открытого волновода.

Отметим, что мы рассматриваем лишь поверхностные волны, убывающие на удалении от волновода в поперечном сечении (и накладываем соответствующие условия на бесконечности). Другие типы волн в данной статье не рассматриваются.

1. Постановка задачи

Волноведущую структуру будем рассматривать в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ с цилиндрической системой координат $0\rho\varphi z$. Пространство заполнено изотропной однородной средой без источников с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_0 \equiv \mathrm{const}$ и магнитной проницаемостью $\mu_0 \equiv \mathrm{const}$, где ε_0 и μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума. В $\mathbb{R}^3$ помещен цилиндрический металло-диэлектрический волновод с киральным слоем

$$\Sigma := \{(\rho, \varphi, z) : r_0 \leqslant \rho \leq r,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\},$$

с образующей, параллельной оси Oz. Волновод имеет поперечное круговое сечение, показанное на рис. 1. Это кольцо с внутренним радиусом r_0 и внешним радиусом r. Граница $\rho = r_0$ является проекцией поверхности идеально проводящего экрана, а граница $\rho = r$ является проекцией поверхности диэлектрика.

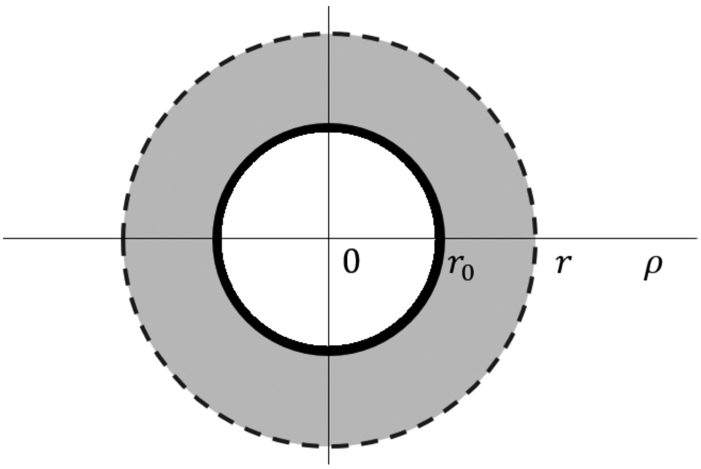

Рис. 1. Поперечное сечение волноведущей структуры

В рассматриваемой задаче необходимо найти (нетривиальные) решения однородной системы уравнений Максвелла в виде бегущей волны, т.е. с гармонической зависимостью $e^{i\gamma z}$ от продольной координаты z:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\tilde{\varepsilon}\mathbf{E} - \omega\tilde{\chi}\mathbf{H}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\tilde{\mu}\mathbf{H} - \omega\tilde{\chi}\mathbf{E}, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \left(E_\rho(\rho)\mathbf{e}_\rho + E_\varphi(\rho)\mathbf{e}_\varphi + E_z(\rho)\mathbf{e}_z\right)e^{i\gamma z}, \\ \mathbf{H} &= \left(H_\rho(\rho)\mathbf{e}_\rho + H_\varphi(\rho)\mathbf{e}_\varphi + H_z(\rho)\mathbf{e}_z\right)e^{i\gamma z}. \end{aligned} \tag{2}$$

При этом должны быть удовлетворены условия ограниченности энергии поля в любом конечном объеме, краевые условия для касательных составляющих электрического поля на поверхности идеального проводника:

$$E_\varphi\big|_{\rho=r_0} = 0, \; E_z\big|_{\rho=r_0} = 0, \tag{3}$$

и условия непрерывности касательных составляющих полей на границе раздела сред

$$\begin{aligned} \left[E_\varphi\right]\big|_{\rho=r} &= 0, \quad \left[E_z\right]\big|_{\rho=r} = 0, \\ \left[H_\varphi\right]\big|_{\rho=r} &= 0, \quad \left[H_z\right]\big|_{\rho=r} = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\left[f\right]\big|_{\rho_0} = \lim\limits_{\rho\to\rho_0-0} f(\rho) - \lim\limits_{\rho\to\rho_0+0} f(\rho)$, а также условие излучения на бесконечности: убывание электромагнитного поля при $\rho\to\infty$.

Диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость и киральность во всем пространстве имеют вид

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon(\rho), & r_0 \le \rho \le r, \\ \varepsilon_0, & \rho > r; \end{cases} \quad \tilde{\mu} = \begin{cases} \mu(\rho), & r_0 \le \rho \le r, \\ \mu_0, & \rho > r; \end{cases} \quad \tilde{\chi} = \begin{cases} \chi, & r_0 \le \rho \le r, \\ 0, & \rho > r, \end{cases} \tag{5}$$

где $\varepsilon(\rho) \in C^1[r_0, r]$, $\min\limits_{[r_0,r]} \varepsilon(\rho) > \varepsilon_0$, $\mu(\rho) \in C^1[r_0, r]$, $\min\limits_{[r_0,r]} \mu(\rho) > \mu_0$ и χ – вещественная постоянная.

Принята следующая классификация волн [1–4]. В зависимости от спектрального параметра γ (постоянной распространения) волны бывают трех типов: распространяющиеся, затухающие, комплексные.

Определение 1. Распространяющаяся волна характеризуется действительным параметром γ.

Определение 2. Затухающая волна характеризуются чисто мнимым параметром γ.

Определение 3. Комплексная волна характеризуется комплексным параметром γ таким, что $\operatorname{Re}\gamma \operatorname{Im}\gamma \ne 0$.

В зависимости от условия на бесконечности волны бывают двух типов: поверхностные и вытекающие. В статье рассматриваются только поверхностные волны.

Определение 4. Поверхностная волна удовлетворяет условию $u(\rho) \to 0,\ \rho \to \infty.$

Таким образом, рассматривается задача о распространении поверхностных волн в волноведущей структуре, которая заключается в нахождении собственных значений для системы уравнений Максвелла (с перечисленными выше условиями) относительно спектрального параметра γ – постоянной распространения волноведущей структуры.

Запишем систему уравнений Максвелла (1) в координатной форме:

$$\begin{cases} -i\gamma H_\varphi = -i\omega\tilde{\varepsilon}E_\rho - \omega\tilde{\chi}H_\rho, \\ i\gamma H_\rho - H_z' = -i\omega\tilde{\varepsilon}E_\varphi - \omega\tilde{\chi}H_\varphi, \\ \dfrac{1}{\rho}\left(\rho H_\varphi\right)' = -i\omega\tilde{\varepsilon}E_z - \omega\tilde{\chi}H_z, \\ -i\gamma E_\varphi = i\omega\tilde{\mu}H_\rho - \omega\tilde{\chi}E_\rho, \\ i\gamma E_\rho - E_z' = i\omega\tilde{\mu}H_\varphi - \omega\tilde{\chi}E_\varphi, \\ \dfrac{1}{\rho}\left(\rho E_\varphi\right)' = i\omega\tilde{\mu}H_z - \omega\tilde{\chi}E_z, \end{cases} \tag{6}$$

и представим функции E_ρ H_ρ E_z H_z через E_φ и H_φ , используя 1, 3, 4 и 6-е уравнение последней системы. Получаем выражения:

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{\gamma}{\omega}\frac{i\tilde{\chi}E_\varphi - \tilde{\mu}H_\varphi}{\tilde{\chi}^2 - \tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}}, \qquad & E_z &= -\frac{1}{\omega\rho}\frac{\tilde{\chi}\left(\rho E_\varphi\right)' + i\tilde{\mu}\left(\rho H_\varphi\right)'}{\tilde{\chi}^2 - \tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}}, \\ H_\rho &= \frac{\gamma}{\omega}\frac{i\tilde{\chi}H_\varphi + \tilde{\varepsilon}E_\varphi}{\tilde{\chi}^2 - \tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}}, \qquad & H_z &= -\frac{1}{\omega\rho}\frac{\tilde{\chi}\left(\rho H_\varphi\right)' - i\tilde{\varepsilon}\left(\rho E_\varphi\right)'}{\tilde{\chi}^2 - \tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}}. \end{aligned} \tag{7}$$

Из данных формул видно, что поле в волноводе может быть представлено при помощи двух скалярных функций:

$$u_e := iE_\varphi(\rho), \quad u_m := H_\varphi(\rho). \tag{8}$$

Отсюда следует, что достаточно найти функции u_e и u_m – касательные компоненты электрического и магнитного полей. Всюду $(\cdot)'$ обозначает дифференцирование по ρ.

Для касательных компонент поля u_e и u_m имеем следующую задачу на собственные значения: требуется найти такие $\gamma \in \mathbb{C}$, для которых существуют нетривиальные решения системы дифференциальных уравнений

$$u_e'' + \tilde{h}_e u_e' + \left(\tilde{g}_e - \gamma^2\right)u_e = \tilde{f}_m\left(\rho u_m\right)' + \tilde{k}_m u_m,$$

$$u_m'' + \tilde{h}_m u_m' + \left(\tilde{g}_e - \gamma^2\right) u_m = \tilde{f}_e \left(\rho u_e\right)' + \tilde{k}_e u_e, \tag{9}$$

где

$$\tilde{h}_e = \frac{\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}'}{\tilde{\chi}^2 - \tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}} + \frac{1}{\rho}, \;\; \tilde{h}_m = \frac{\tilde{\varepsilon}'\tilde{\mu}}{\tilde{\chi}^2 - \tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}} + \frac{1}{\rho},$$

$$\tilde{g}_e = \omega^2\left(\tilde{\chi}^2 + \tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}\right) - \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}'}{\tilde{\chi}^2 - \tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}}, \;\; \tilde{g}_m = \omega^2\left(\tilde{\chi}^2 + \tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}\right) - \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\tilde{\varepsilon}'\tilde{\mu}}{\tilde{\chi}^2 - \tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}},$$

$$\tilde{f}_e = \frac{\tilde{\chi}\tilde{\varepsilon}'}{\rho\left(\tilde{\chi}^2 - \tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}\right)}, \;\; \tilde{f}_m = \frac{\tilde{\chi}\tilde{\mu}'}{\rho\left(\tilde{\chi}^2 - \tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}\right)}, \;\; \tilde{k}_e = -2\omega^2\tilde{\chi}\tilde{\varepsilon}, \;\; \tilde{k}_m = -2\omega^2\tilde{\chi}\tilde{\mu},$$

удовлетворяющие граничным условиям и условиям сопряжения на границах r_0 и r

$$u_e\big|_{r_0} = 0, u_m'\big|_{r_0} = 0, \left[u_e\right]\big|_r = 0, \left[u_m\right]\big|_r = 0,$$

$$\left[\frac{\tilde{\chi}\left(\rho u_e\right)' - \tilde{\mu}\left(\rho u_m\right)'}{\tilde{\chi}^2 - \tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}}\right]\Bigg|_r = 0, \;\; \left[\frac{\tilde{\chi}\left(\rho u_m\right)' - \tilde{\varepsilon}\left(\rho u_e\right)'}{\tilde{\chi}^2 - \tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}}\right]\Bigg|_r = 0, \tag{10}$$

условию ограниченности энергии поля во всякой конечной области и условию на бесконечности: для поверхностных волн: $u_e(\rho) \to 0$, $u_m(\rho) \to 0$, $\rho \to \infty$; для вытекающих волн: $u_e(\rho) \to \infty$, $u_m(\rho) \to \infty$, $\rho \to \infty$.

Решив задачи (9)–(10) и найдя компоненты поля u_e и u_m, можно, подставив их в формулу (7), определить поперечные составляющие. Определенное так поле $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ удовлетворяет всем условиям (1)–(4).

При $\rho > r$ имеем $\tilde{\varepsilon}' = 0$ и $\tilde{\chi} = 0$, тогда из (9) получаем систему

$$\left(\rho u_e'\right)' - \rho\left(\kappa^2 + \frac{1}{\rho^2}\right) u_e = 0,$$

$$\left(\rho u_m'\right)' - \rho\left(\kappa^2 + \frac{1}{\rho^2}\right) u_m = 0,$$

где $\kappa^2 = \gamma^2 - \omega^2\varepsilon_0\mu_0$.

Пользуясь тем, что у поверхностных волн электромагнитное поле затухает на бесконечности, получаем решение последней системы в виде

$$\begin{aligned} u_e(\rho; \gamma, m) &= C_1 K_1(\kappa\rho), \\ u_m(\rho; \gamma, m) &= C_2 K_1(\kappa\rho), \end{aligned} \tag{11}$$

где функция K_1 – модифицированная функция Бесселя (функция Макдональда) [9], C_1 и C_2 – постоянные.

В силу условия на бесконечности выбираем квадратный корень следующим образом:

$$\kappa = \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_c\mu_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left|\gamma^2 - \varepsilon_0\mu_0\right| + \operatorname{Re}\left(\gamma^2 - \varepsilon_0\mu_0\right)} +$$

$$+\frac{i}{\sqrt{2}}\operatorname{sign}\operatorname{Im}\left(\gamma^2 - \varepsilon_0\mu_0\right)\sqrt{\left|\gamma^2 - \varepsilon_0\mu_0\right| - \operatorname{Re}\left(\gamma^2 - \varepsilon_0\mu_0\right)}.$$

При $r_0 \le \rho \le r$ имеем $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(\rho)$, и из (9) мы получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} Lu_e &:= u_e'' + h_e u_e' + \left(g_e - \gamma^2\right)u_e = f_m\left(\rho u_m\right)' + k_m u_m, \\ Lu_m &:= u_m'' + h_m u_m' + \left(g_e - \gamma^2\right)u_m = f_e\left(\rho u_e\right)' + k_e u_e, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$h_e = \frac{\varepsilon\mu'}{\chi^2 - \varepsilon\mu} + \frac{1}{\rho},\ \ h_m = \frac{\varepsilon'\mu}{\chi^2 - \varepsilon\mu} + \frac{1}{\rho},$$

$$g_e = \omega^2\left(\chi^2 + \varepsilon\mu\right) - \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\varepsilon\mu'}{\chi^2 - \varepsilon\mu},\ \ g_m = \omega^2\left(\chi^2 + \varepsilon\mu\right) - \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\varepsilon'\mu}{\chi^2 - \varepsilon\mu},$$

$$f_e = \frac{\chi\varepsilon'}{\rho\left(\chi^2 - \varepsilon\mu\right)},\ \ f_m = \frac{\chi\mu'}{\rho\left(\chi^2 - \varepsilon\mu\right)},\ \ k_e = -2\omega^2\chi\varepsilon,\ \ k_m = -2\omega^2\chi\mu.$$

Если известно решение вне волновода, то задача в неограниченной области может быть сведена к задаче на собственные значения на отрезке $[r_0, r]$. Введем следующее

Определение 5. Если существуют нетривиальные функции u_e и u_m, отвечающие некоторому $\gamma \in \mathbb{C}$, которые при $\rho > r$ определяются решениями (11), а при $r_0 \le \rho \le r$ являются решением системы уравнений (12), и функции u_e и u_m удовлетворяют условиям сопряжения (10), то γ называется характеристическим числом задачи.

Определение 6. Пару функций u_e и u_m, $|u_e|^2 + |u_m|^2 \not\equiv 0$, будем называть собственным вектором задачи, отвечающим характеристическому числу $\gamma \in \mathbb{C}$.

Лемма 1. Если γ – характеристическое число задачи, то $-\gamma$, $\overline{\gamma}$ и $-\overline{\gamma}$ также являются характеристическими числами задачи с собственными векторами $(u_e, -u_m), (\overline{u}_e, \overline{u}_m)$ и $(\overline{u}_e, -\overline{u}_m)$ соответственно.

2. Вариационная постановка

Будем искать решения u_e и u_m задачи в пространствах Соболева соответственно

$$H_0^1(r_0,r)=\left\{f: f\in H^1(r_0,r), f\big|_{r_0}=0\right\} \text{ и } H^1(r_0,r)$$

со скалярным произведением и нормой:

$$(f,g)_1=\int_{r_0}^{r}(f'\overline{g}'+f\overline{g})d\rho,\ \|f\|_1^2=(f,f)_1=\int_{r_0}^{r}\left(|f'|^2+|f|^2\right)d\rho.$$

Здесь мы используем обозначение для пространства Соболева $H_0^1(r_0,r)$, не совпадающее со стандартным: в нашем случае $f\big|_{r_0}=0$, но, вообще говоря, $f\big|_r\neq 0$. Очевидно, имеет место вложение $H_0^1(r_0,r)\subset H^1(r_0,r)$.

Для вариационной формулировки задачи умножим уравнения системы (12) соответственно на произвольные пробные функции v_e и v_m, считая их пока непрерывно дифференцируемыми на отрезке $[r_0,r]$. Используя формулу Грина, получаем

$$\int_{r_0}^{r}\overline{v}Lud\rho=\int_{r_0}^{r}u''\overline{v}d\rho+\int_{r_0}^{r}hu'\overline{v}d\rho-\int_{r_0}^{r}\left(\gamma^2-g\right)u\overline{v}d\rho=$$

$$=u'\overline{v}\big|_{r_0}^{r}-\int_{r_0}^{r}u'\overline{v}'d\rho+\int_{r_0}^{r}hu'\overline{v}d\rho-\int_{r_0}^{r}\left(\gamma^2-g\right)u\overline{v}d\rho, \tag{13}$$

где $u=u_j, v=v_j, h=h_j, g=g_j, j=e$ или m.

Применяя полученную формулу (13) отдельно для первого и второго уравнений системы (12) на отрезке $[r_0,r]$ и складывая результаты, получим

$$\int_{r_0}^{r}(\overline{v}_eLu_e+\overline{v}_mLu_m)d\rho=-\gamma^2\int_{r_0}^{r}(u_e\overline{v}_e+u_m\overline{v}_m)d\rho-$$

$$-\int_{r_0}^{r}(u_e'\overline{v}_e'+u_m'\overline{v}_m')d\rho+\int_{r_0}^{r}(h_eu_e'\overline{v}_e+h_mu_m'\overline{v}_m)d\rho+$$

$$+\int_{r_0}^{r}(g_eu_e\overline{v}_e+g_mu_m\overline{v}_m)d\rho+\left(u_e'(r)\overline{v}_e(r)+u_m'(r)\overline{v}_m(r)\right). \tag{14}$$

Принимая во внимание правые части уравнений системы (12), имеем

$$\int_{r_0}^{r}(\overline{v}_eLu_e+\overline{v}_mLu_m)d\rho=$$

$$=\int_{r_0}^{r}\left(f_e\left(\rho u_e\right)'\overline{v}_m+f_m\left(\rho u_m\right)'\overline{v}_e\right)d\rho+\int_{r_0}^{r}\left(k_e u_e\overline{v}_m+k_m u_m\overline{v}_e\right)d\rho. \tag{15}$$

Так как решения (11) вне волновода известны, выразим из формул (10) нормальные производные на границе $\rho=r$:

$$u_e'(r)=\kappa\left(\frac{\mu}{\varepsilon_0}F(\gamma)-\frac{1}{r}\right)u_e(r)+\kappa\frac{\chi}{\varepsilon_0}F(\gamma)u_m(r),$$

$$u_m'(r)=\kappa\left(\frac{\varepsilon}{\mu_0}F(\gamma)-\frac{1}{r}\right)u_m(r)+\kappa\frac{\chi}{\mu_0}F(\gamma)u_e(r), \tag{16}$$

где

$$F(\gamma)=-\frac{K_0(\kappa r)}{K_1(\kappa r)}.$$

Из (14), с учетом (15) и (16) получаем вариационное соотношение

$$\gamma^2\int_{r_0}^{r}\left(u_e\overline{v}_e+u_m\overline{v}_m\right)d\rho+\int_{r_0}^{r}\left(u_e'\overline{v}_e'+u_m'\overline{v}_m'+u_e\overline{v}_e+u_m\overline{v}_m\right)d\rho-$$

$$-\int_{r_0}^{r}\left(\left(g_e+1\right)u_e\overline{v}_e+\left(g_m+1\right)u_m\overline{v}_m\right)d\rho-\int_{r_0}^{r}\left(h_e u_e'\overline{v}_e+h_m u_m'\overline{v}_m\right)d\rho+$$

$$+\int_{r_0}^{r}\left(f_e\left(\rho u_e\right)'\overline{v}_m+f_m\left(\rho u_m\right)'\overline{v}_e\right)d\rho+\int_{r_0}^{r}\left(k_e u_e\overline{v}_m+k_m u_m\overline{v}_e\right)d\rho+$$

$$+\left(\kappa\left(\frac{\mu}{\varepsilon_0}F(\gamma)-\frac{1}{r}\right)u_e(r)+\kappa\frac{\chi}{\varepsilon_0}F(\gamma)u_m(r)\right)\overline{v}_e(r)+$$

$$+\left(\kappa\left(\frac{\varepsilon}{\mu_0}F(\gamma)-\frac{1}{r}\right)u_m(r)+\kappa\frac{\chi}{\mu_0}F(\gamma)u_e(r)\right)\overline{v}_m(r)=0. \tag{17}$$

Вариационное соотношение (17) получено для гладких функций v_e и v_m. Соотношение (17) распространяется на любые функции $v_e\in H_0^1(r_0,r)$, $v_m\in H^1(r_0,r)$ по непрерывности в силу ограниченности соответствующих квадратичных форм, что будет показано ниже.

Пусть $H=H_0^1(r_0,r)\times H^1(r_0,r)$ – декартово произведение гильбертовых пространств со скалярным произведением и нормой:

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})=(u_1,v_1)_1+(u_2,v_2)_1,\|\mathbf{u}\|^2=\|u_1\|_1^2+\|u_2\|_1^2;\ \mathbf{u},\mathbf{v}\in H,$$

$$(\mathbf{u})=(u_1,u_2)^T,(\mathbf{v})=(v_1,v_2)^T,\ \ u_1,v_1\in H_0^1(r_0,r),\ \ u_2,v_2\in H^1(r_0,r).$$

Тогда интегралы, входящие в (17), можно рассматривать как полуторалинейные формы над полем $\mathbb{C}$, заданные на H от аргументов

$$\mathbf{u} = \left(u_e, u_m\right)^T, \mathbf{v} = \left(\overline{v}_e, \overline{v}_m\right)^T.$$

Эти формы определяют [10] некоторые линейные ограниченные операторы $T : H \to H$ по формуле

$$t\left(\mathbf{u}, \mathbf{v}\right) = \left(T\mathbf{u}, \mathbf{v}\right), \ \forall \mathbf{v} \in H, \tag{18}$$

при условии, что сами формы ограничены: $\left|t(\mathbf{u}, \mathbf{v})\right| \le C\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$. Линейность следует из линейности формы по первому аргументу, а непрерывность из оценок

$$\|T\mathbf{u}\|^2 = t\left(\mathbf{u}, T\mathbf{u}\right) \le C\|\mathbf{u}\|\|T\mathbf{u}\|.$$

Рассмотрим полуторалинейные формы и порождаемые ими операторы:

$$k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{r_0}^{r} \left(u_e \overline{v}_e + u_m \overline{v}_m\right) d\rho = (K\mathbf{u}, \mathbf{v}), \ \forall \mathbf{v} \in H,$$

$$k_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{r_0}^{r} \left(\left(g_e + 1\right) u_e \overline{v}_e + \left(g_m + 1\right) u_m \overline{v}_m\right) d\rho = \left(K_1\mathbf{u}, \mathbf{v}\right), \ \forall \mathbf{v} \in H,$$

$$\tilde{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{r_0}^{r} \left(k_e u_e \overline{v}_m + k_m u_m \overline{v}_e\right) d\rho = \left(\tilde{K}\mathbf{u}, \mathbf{v}\right), \ \forall \mathbf{v} \in H,$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{r_0}^{r} \left(u_e' \overline{v}_e' + u_m' \overline{v}_m' + u_e \overline{v}_e + u_m \overline{v}_m\right) d\rho = (I\mathbf{u}, \mathbf{v}), \ \forall \mathbf{v} \in H,$$

$$b_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{r_0}^{r} \left(h_e u_e' \overline{v}_e' + h_m u_m' \overline{v}_m'\right) d\rho = (B_1\mathbf{u}, \mathbf{v}), \ \forall \mathbf{v} \in H,$$

$$b_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{r_0}^{r} \left(f_e \left(\rho u_e\right)' \overline{v}_m + f_m \left(\rho u_m\right)' \overline{v}_e\right) d\rho = (B_2\mathbf{u}, \mathbf{v}), \ \forall \mathbf{v} \in H.$$

$$s\left(\mathbf{u}, \mathbf{v}\right) = \left(\kappa\left(\frac{\mu}{\varepsilon_0} F\left(\gamma\right) - \frac{1}{r}\right) u_e\left(r\right) + \kappa \frac{\chi}{\varepsilon_0} F\left(\gamma\right) u_m\left(r\right)\right) \overline{v}_e\left(r\right) +$$

$$+ \left(\kappa\left(\frac{\varepsilon}{\mu_0} F\left(\gamma\right) - \frac{1}{r}\right) u_m\left(r\right) + \kappa \frac{\chi}{\mu_0} F\left(\gamma\right) u_e\left(r\right)\right) \overline{v}_m\left(r\right) = \left(S\left(\gamma\right)\mathbf{u}, \mathbf{v}\right), \ \forall \mathbf{v} \in H. \tag{19}$$

Теперь вариационную задачу (17) можно записать в операторном виде:

$$(N(\gamma)\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0,\ \ \forall \mathbf{v} \in H$$

или эквивалентно

$$N(\gamma) := \left(\gamma^2 K + I - K_1 - B_1 + B_2 + \tilde{K} + S(\gamma)\right)\mathbf{u} = 0. \qquad (20)$$

Уравнение (20) – операторная запись вариационного соотношения (17). Характеристические числа и собственные векторы N совпадают по определению с собственными значениями и собственными векторами исходной задачи на собственные значения на отрезке $[r_0, r]$.

3. Исследование спектра

Задача о поверхностных электромагнитных волнах в неоднородном открытом волноводе с киральным слоем свелась к изучению спектральных свойств оператор-функции N. Приведем следующие утверждения о свойствах операторов, входящих в оператор-функцию $N(\gamma)$, которые понадобятся в дальнейшем (доказательство см. в [5, 6]).

Лемма 2. Ограниченные операторы K, K_1 и $\tilde{K} : H \to H$ являются компактными и $K > 0$.

Лемма 3. Операторы B_1 и $B_2 : H \to H$ являются компактными.

Лемма 4. Оператор $S : H \to H$ является компактным.

Обозначим через $\xi(N)$ резольвентное множество оператор-функции $N(\gamma)$, т.е. совокупность тех $\gamma \in \mathbb{C}$, при которых оператор $N(\gamma)$ имеет ограниченный обратный. Спектр $N(\gamma)$, будем обозначать через $\sigma(N)$; $\sigma(N) = \mathbb{C} \setminus \xi(N)$.

Теорема 1. Оператор-функция $N(\gamma) : H \to H$ является ограниченной, голоморфной и фредгольмовой в области $\Lambda = \mathbb{C} \setminus \tilde{\Lambda}$, $\tilde{\Lambda} = \left\{\gamma : \operatorname{Im}\gamma^2 = 0, \gamma^2 \le \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0\right\}$.

Доказательство. В области Λ оператор-функция $N(\gamma) : H \to H$ является ограниченной и голоморфной. Оператор-функция $N(\gamma)$ фредгольмова как сумма обратимого I и компактных $K, K_1, B_1, B_2, \tilde{K}$ и S операторов.

Лемма 5. Существует $\tilde{\gamma} \in \mathbb{R}$ такое, что оператор $\tilde{N}(\gamma)$ непрерывно обратим, т.е. резольвентное множество $\xi(N) := \left\{\gamma : \exists N^{-1}(\gamma) : H \to H\right\}$ оператор-функции $N(\tilde{\gamma})$ не пусто; $\xi(N) \ne \varnothing$.

Доказательство. Пусть $\gamma_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$, тогда

$$\kappa = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} = 0. \qquad (21)$$

Рассмотрим оператор-функцию $N(\gamma)$ на множестве $[\gamma_0, \gamma_0 + t)$ для некоторого $t > 0$. Эта функция непрерывна на указанном множестве в силу (19), (20), выбора ветви квадратного корня и асимптотики функций при $z \to +0$ $(z \in R)$:

$$K_0(z) \sim -\ln z,\ K_1(z) \sim \frac{1}{z},\ F(\gamma_0) = 0.$$

Тогда если существует и ограничен оператор $N^{-1}(\gamma_0): H \to H$, то найдется такое $0 < t_0 < t$, что оператор $N^{-1}(\gamma_0 + t_0)$ также будет ограниченным и $\gamma_0 + t_0 \in \xi(N)$. Таким образом, в силу фредгольмовости $N(\gamma)$ достаточно доказать, что уравнение $N(\gamma_0)\mathbf{u} = 0$ имеет только тривиальное решение.

Варьируя функции v_e и v_m в (17), получаем, что выполнено (16). Тогда при $\gamma = \gamma_0$ (соответственно, $\kappa = 0$) и имеем $u_e'(r) = u_m'(r) = 0$. Подставляя эти выражения в условия сопряжения (10), нетрудно проверить, что при $\chi^2 \neq (\varepsilon(r) - \varepsilon_0)(\mu(r) - \mu_0)$ необходимо $u_e(r) = u_m(r) = 0$. Но тогда мы имеем задачу Коши для системы дифференциальных уравнений второго порядка (9) с однородными (нулевыми) начальными условиями. Откуда в силу гладкости коэффициентов уравнений находим, что $u_e(r) \equiv u_m(r) \equiv 0$. Заметим, что точка $\gamma_0 + t_0$ лежит в области голоморфности оператор-функции $N(\gamma)$, поэтому непустота резольвентного множества доказана.

Теорема 2. Спектр оператор-функции $N(\gamma): H \to H$ является дискретным в Λ, т.е. имеет конечное число характеристических точек конечной алгебраической кратности в любом компакте $\mathrm{K}_0 \subset \Lambda$.

Доказательство. Утверждение теоремы является следствием теоремы 1 и теоремы о голоморфной оператор-функции [11].

4. Проекционный метод

Используя вариационное соотношение (17), применим проекционный метод [12] для получения системы алгебраических уравнений. Разделим отрезок $[r_0, r]$ на n равных отрезков длиной $h = \dfrac{r - r_0}{n}$. Определим набор из n отрезков

$$\Phi_i = \left[r_0 + (i-1)h, r_0 + (i+1)h\right], i = 1,\dots,n-1 \text{ и } \Phi_n = \left[r_0 + (n-1)h, r\right]$$

и набор из $(n+1)$ отрезков

$$\Psi_1 = [r_0, r_0 + h], \Psi_j = \left[r_0 + (i-2)h, r_0 + il\right], j = 2,\dots,n \text{ и } \Psi_{n+1} = \left[r_0 + (n-1)h, r\right].$$

Эти отрезки будем называть носителями.

В соответствии со схемой проекционного метода выберем базисные функции φ_i и ψ_j будем определять приближенное решение уравнения (18) как линейную комбинацию базисных функций. Базисные функции определены на носителях Φ_i и Ψ_j.

Базисные функции φ_i, определенные на Φ_i, имеют вид

$$\varphi_i = \begin{cases} \dfrac{\rho - r_0 - (i-1)h}{h}, & \rho < r_0 + ih, \\ -\dfrac{\rho - r_0 - (i+1)h}{h}, & \rho > r_0 + ih, \end{cases} \quad i = \overline{1, n-1} \tag{22}$$

и

$$\varphi_n = \frac{\rho - r + h}{l}. \tag{23}$$

Соответственно базисные функции ψ_j, определенные на Ψ_j, имеют вид

$$\psi_1 = -\frac{\rho^2 - 2r_0\rho + r_0{}^2 - h^2}{h^2}, \tag{24}$$

$$\psi_2 = \begin{cases} \dfrac{\rho^2 - 2r_0\rho + r_0{}^2}{h^2}, & \rho < r_0 + h, \\ -\dfrac{\rho - r_0 - 2h}{h}, & \rho > r_0 + h, \end{cases} \tag{25}$$

$$\psi_j = \begin{cases} \dfrac{\rho - r_0 - (i-2)h}{h}, & \rho < r_0 + (i-1)h, \\ -\dfrac{\rho - r_0 - ih}{h}, & \rho > r_0 + (i-1)h, \end{cases} \quad j = \overline{3, n} \tag{26}$$

и

$$\psi_{n+1} = \frac{\rho - r + h}{h}. \tag{27}$$

Отметим, что так определенные базисные функции учитывают краевые условия (10). Приближенные решения рассматриваемой задачи будем искать в виде

$$u_e = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i, \; u_m = \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j \psi_j, \tag{28}$$

где α_i, β_j – неизвестные коэффициенты.

Подставляя функции u_e и u_m вида (28) в вариационное соотношение (17), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно α_i и β_j (для фиксированного значения γ):

$$A(\gamma)x = 0, \tag{29}$$

где матрицы $A = A(\gamma)$ и x имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} A_{ee}^{1,1} & \cdots & A_{ee}^{1,n} & A_{em}^{1,1} & \cdots & A_{em}^{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{ee}^{n,1} & \cdots & A_{ee}^{n,n} & A_{em}^{n,1} & \cdots & A_{em}^{n,n+1} \\ A_{me}^{1,1} & \cdots & A_{me}^{1,n} & A_{mm}^{1,1} & \cdots & A_{mm}^{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{me}^{n+1,1} & \cdots & A_{me}^{n+1,n} & A_{mm}^{n+1,1} & \cdots & A_{mm}^{n+1,n+1} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix},$$

с коэффициентами

$$A_{ee}^{i,j} = \gamma^2 \int\limits_{\Phi_i} \varphi_i \varphi_j d\rho + \int\limits_{\Phi_i} \varphi_i' \varphi_j' d\rho - \int\limits_{\Phi_i} g_e \varphi_i \varphi_j d\rho - \int\limits_{\Phi_i} h_e \varphi_i' \varphi_j' d\rho +$$

$$+\kappa \left(\frac{\mu(r)}{\varepsilon_0} F(\gamma) - \frac{1}{r} \right) \varphi_i(r) \varphi_j(r), \; i, j = \overline{1,n},$$

$$A_{em}^{i,j} = \int\limits_{\Phi_i} \left(f_e (\rho\varphi_i)' + k_e \varphi_i \right) \psi_j d\rho + \kappa \frac{\chi}{\mu_0} F(\gamma) \varphi_i(r) \psi_j(r), \; i = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,n+1},$$

$$A_{me}^{i,j} = \int\limits_{\Phi_i} \left(f_m (\rho\psi_i)' + k_m \psi_i \right) \varphi_j d\rho + \kappa \frac{\chi}{\varepsilon_0} F(\gamma) \psi_i(r) \varphi_j(r), \; i = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,n+1},$$

$$A_{mm}^{i,j} = \gamma^2 \int\limits_{\Psi_i} \psi_i \psi_j d\rho + \int\limits_{\Psi_i} \psi_i' \psi_j' d\rho - \int\limits_{\Psi_i} g_m \psi_i \psi_j d\rho - \int\limits_{\Psi_i} h_m \psi_i' \psi_j d\rho +$$

$$+\kappa \left(\frac{\varepsilon(r)}{\mu_0} F(\gamma) - \frac{1}{r} \right) \psi_i(r) \psi_j(r), \; i, j = \overline{1,n+1}.$$

Матрица A имеет размерность $(2n+1)\times(2n+1)$.

Обозначим через Δ определитель матрицы $A(\gamma)$:

$$\Delta(\gamma) \equiv \det A(\gamma).$$

Будем искать приближенные решения $\tilde{\gamma} \in \mathbb{R}$ как решения уравнения $\Delta(\tilde{\gamma}) = 0$. Если интервал $\left[\underline{\gamma}, \overline{\gamma}\right]$ таков, что $\Delta(\underline{\gamma}) \times \Delta(\overline{\gamma}) < 0$, то это означает, что существует $\tilde{\gamma} \in \left[\underline{\gamma}, \overline{\gamma}\right]$, которое является характеристическим числом пучка и, соответственно, постоянной распространения рассматриваемой задачи. За счет увеличения n это значение может быть вычислено с любой заданной точностью.

5. Численные результаты

В качестве модельной рассмотрим задачу со следующими параметрами: $r_0 = 2$, $r = 4$, $\varepsilon = 4 + \rho$, $\mu = 1$, $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$. Дисперсионные кривые для двух волн (графики зависимости нормированной постоянной распространения γ/ω от частоты ω) приведены на рис 2.

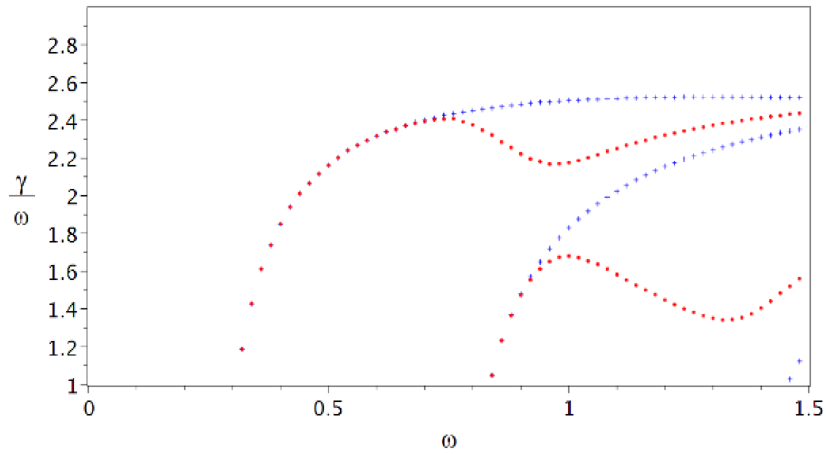

Рис. 2. Дисперсионные кривые. Красные точки соответствуют киральному заполнению волновода $\chi = 0{,}01$. Синие кривые соответствуют волноводу заполненному неоднородным диэлектриком $\chi = 0$

Рисунок 2 показывает, что киральное заполнение слоя в определенном диапазоне частот существенно влияет на свойства распространяющихся волн.

Предложенный метод позволяет вычислять характеристики волноводов кругового сечения с неоднородным киральным слоем.

Список литературы

1. Ильинский А. С., Шестопалов Ю. В. Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн. М. : Изд-во МГУ, 1989. – 189 с.
2. Смирнов Ю. Г. Метод операторных пучков в краевых задачах сопряжения для системы эллиптических уравнений // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 1. С. 140–147.
3. Смирнов Ю. Г. Применение метода операторных пучков в задаче о собственных волнах частично заполненного волновода // Доклады Академии наук СССР. 1990. Т. 312, № 3. С. 597–599.
4. Делицин А. Л. Об одном подходе к задаче о полноте системы собственных и присоединенных волн волновода // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 5. – С. 629–633.
5. Смирнов Ю. Г. Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза : Инф.-изд. центр ПензГУ, 2009. – 268 с.
6. Смирнов Ю. Г., Смолькин Е. Ю. О дискретности спектра в задаче о нормальных волнах открытого неоднородного волновода // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 10. С. 1298–1309.
7. Неганов В. А., Осипов О. В. Рассеяние плоских электромагнитных волн на кирально-металлическом цилиндре // Письма в Журнал технической физики. 2000. Т. 26, № 1. С. 77–83.
8. Боголюбов А. Н., Мосунова Н. А., Петров Д. А. Физические эффекты в киральных волноведущих системах и их математическое моделирование // Радиотехника и электроника. 2008. Т. 53, № 8. С. 914–924.
9. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М. : Наука, 1979. – 832 с.

10. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М. : Мир, 1972. – 740 с.
11. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М. : Наука, 1965. – С. 37–43.
12. Smolkin E. Numerical Method for Electromagnetic Wave Propagation Problem in a Cylindrical Inhomogeneous Metal Dielectric Waveguiding Structures, Mathematical Modelling and Analysis. 2017. Vol. 22. P. 271–282.

References

1. Il'inskiy A.S., Shestopalov Yu.V. *Primenenie metodov spektral'noy teorii v zadachakh rasprostraneniya voln = Application of methods of spectral theory in problems of wave propagation.* Moscow: Izd-vo MGU, 1989:189. (In Russ.)
2. Smirnov Yu.G. The method of operator pencils in boundary value problems of conjugation for a system of elliptic equations. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations.* 1991;27(1):140–147. (In Russ.)
3. Smirnov Yu.G. Application of the method of operator beams to the problem of eigenwaves of a partially filled waveguide. *Doklady Akademii nauk SSSR = Reports of the USSR Academy of Sciences.* 1990;312(3):597–599. (In Russ.)
4. Delitsin A.L. On the approach to the problem of completeness of the system of natural and associated waves of a waveguide. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations.* 2000;36(5):629–633. (In Russ.)
5. Smirnov Yu.G. *Matematicheskie metody issledovaniya zadach elektrodinamiki = Mathematical methods for studying problems of electrodynamics*. Penza: Inf. –izd. tsentr PenzGU, 2009:268. (In Russ.)
6. Smirnov Yu.G., Smol'kin E.Yu. Discreteness of the spectrum in the problem of normal waves of an open inhomogeneous waveguide. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations.* 2017;53(10):1298–1309. (In Russ.)
7. Neganov V.A., Osipov O.V. *Rasseyanie ploskikh elektromagnitnykh voln na kiral'no-metallicheskom tsilindre. Pis'ma v Zhurnal tekhnicheskoy fiziki = Scattering of plane electromagnetic waves by a chiral metal cylinder. Letters to the Journal of Technical Physics*. 2000;26(1):77–83. (In Russ.)
8. Bogolyubov A.N., Mosunova N.A., Petrov D.A. *Fizicheskie effekty v kiral'nykh volnovedushchikh sistemakh i ikh matematicheskoe modelirovanie. Radiotekhnika i elektronika = Physical effects in chiral waveguide systems and their mathematical modeling. Radio engineering and electronics.* 2008;53(8):914–924. (In Russ.)
9. Abramovits M., Stigan I. *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam = Special functions reference.* Moscow: Nauka, 1979:839. (In Russ.)
10. Kato T. *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov = Perturbation theory of linear operators*. Moscow: Mir, 1972:740. (In Russ.)
11. Gokhberg I.Ts., Kreyn M.G. *Vvedenie v teoriyu lineynykh nesamosopryazhennykh operatorov v gil'bertovom prostranstve = Introduction to the theory of linear non-self-adjoint operators in a Hilbert space.* Moscow: Nauka, 1965:37–43. (In Russ.)
12. Smolkin E. *Numerical Method for Electromagnetic Wave Propagation Problem in a Cylindrical Inhomogeneous Metal Dielectric Waveguiding Structures, Mathematical Modelling and Analysis*. 2017;22:271–282.

Информация об авторах / Information about the authors

Юрий Геннадьевич Смирнов
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Yuriy G. Smirnov
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Евгений Юрьевич Смолькин
кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Evgeniy Yu. Smol'kin
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, associate professor of the sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: e.g.smolkin@hotmail.com

Поступила в редакцию / Received 10.12.2020

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 27.01.2021

Принята к публикации / Accepted 29.01.2021